যশোর বোর্ড—২০১৫

বিষয় কোড : ২ ৬ ৫

সময় — ৩ ঘণ্টা

উচ্চতর গণিত (তত্ত্বীয়) : প্রথম পত্র

পূর্ণমান — ৭৫

[বি. দ্র. ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

ক বিভাগ : বীজগণিত

১. যে কোনো দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও: ৫×২=১০

(ক) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^2 ও A^3 এর মান নির্ণয় কর। অতঃপর:

দেখাও যে, $A^2 + 3A - 10I = 0$, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(খ) প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

(গ) প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

২. যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও: ৫×১=৫

(ক) প্রত্যেক অংককে প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 6, 5, 2, 3, 0 দ্বারা পাঁচ অংকবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায়?

(খ) প্রমাণ কর যে, ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

খ বিভাগ : জ্যামিতি ও ভেক্টর

৩. যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও: ৫×১=৫

(ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

(খ) $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$ দুইটি ভেক্টর হলে, $\vec{a}$ ভেক্টরের উপর $\vec{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ ও $\vec{a}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

৪. যে কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও: ৫×৩=১৫

(ক) x-অক্ষের উপর P, Q বিন্দুদ্বয় এবং y-অক্ষের উপর R, S বিন্দুদ্বয় অবস্থিত। PR ও QS রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y + 6 = 0$ এবং $x + 2y - 1 = 0$; দেখাও যে, PQ = RS.

(খ) (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে, দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা, $7a - b + 2 = 0$.

(গ) (4, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

(ঘ) মূল বিন্দু হতে (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ বিভাগ : ত্রিকোণমিতি

৫. যে কোনো দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও: ৫×২=১০

(ক) লেখচিত্র অংকন কর: $y = \sin^2 x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$.

(খ) একটি বৃত্তচাপ 30 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য এবং চাপটির উপর দন্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) যদি $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$.

৬. যে কোনো দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও: ৫×২=১০

(ক) প্রমাণ কর যে, $\cos^2(A - 120°) + \cos^2 A + \cos^2(A + 120°) = \frac{3}{2}$

(খ) প্রমাণ কর যে, $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$, যেখানে, A ও B কোণদ্বয় সূক্ষ্ম ও ধনাত্মক এবং $(A + B) < 90°$.

(গ) যদি $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \sin C = 0$.

ঘ বিভাগ : ক্যালকুলাস

৭. যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও: ৫×১=৫

(ক) যদি $f(x) = \ln(\sin x)$ এবং $\varphi(x) = \ln(\cos x)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $e^{2\varphi(x)} - e^{2f(x)} = e^{\varphi(2x)}$.

(খ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ফাংশনটি $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

৮. যে কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও: ৫×৩=১৫

(ক) Sandwich Theorem (সেন্ডউইচ উপপাদ্য) বর্ণনা কর এবং $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে cosax এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(গ) যদি $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$.

অথবা,

x-এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর (যে কোনো দুইটি):

(i) $4x^\circ \sin 2x^\circ$

(ii) $10^{\ln(\sin x)}$

(iii) $\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

(ঘ) মান নির্ণয় কর (যে কোনো দুইটি):

(i) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ (ii) $\int \frac{1}{1 - \sin x} dx$

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \, dx$ (iv) $\int_1^{e^2} \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$

উত্তরমালা

১. (ক) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$

২. (ক) 36

৩. (খ) $4 : \frac{4}{7}(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

৪. (গ) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

(ঘ) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

৫. (খ) 31·416 মিটার; 471·24 বর্গ মিটার

৭. (খ) ডোম $f = R - \{1\}$, রেঞ্জ $f = R - \{2\}$

এবং $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}$

৮. (ক) 0

(খ) $-a \sin ax$

(গ) অথবা,

(i) $\frac{\pi}{45}\left(\frac{\pi x}{90}\cos\frac{\pi x}{90} + \sin\frac{\pi x}{90}\right)$

(ii) $\cot x \cdot 10^{\ln(\sin x)} \cdot \ln 10$

(iii) $\operatorname{cosec} x$

(ঘ) (i) $\tan^{-1}(e^x) + c$ (ii) $\tan x + \sec x + c$

(iii) $\frac{2}{3}$ (iv) $\ln 3$